Quelques petits exercices sur le modèle de régression linéaire simple

Exercice 1:

Considérez le modèle de régression linéaire suivant:

$$y_t = \beta + u_t \ t = 1, .., T$$

avec les hypothèses classiques: $E(u_t) = 0, Var(u_t) = \sigma^2, Cov(u_t, u_s) = 0, \forall t \neq s$.

1/ Déterminez $E(y_t)$ et $Var(y_t)$ et $Cov(y_t, y_s)$ dans ce modèle en vous servant des hypothèses données ci-dessus

2/ Déterminez l'estimateur de β par la méthode des MCO, noté $\widehat{\beta}$

3/ Démontrez que cet estimateur est sans biais

4/ Déterminez la variance de cet estimateur

5/ Proposez un estimateur pour la variance du termer d'erreur σ^2

Exercice 2:

Considérez le modèle de régression linéaire suivant:

$$y_t = \beta x_t + u_t \ t = 1, .., T$$

avec les hypothèses classiques: $E(u_t) = 0, Var(u_t) = \sigma^2, Cov(u_t, u_s) = 0, \forall t \neq s$. Pour simplifier l'écriture, on fera également l'hypothèse que x est une variable prenant des valeurs prédeterminées (fixes)

1/ Déterminez $E(y_t)$ et $Var(y_t)$ et $Cov(y_t, y_s)$ dans ce modèle en vous servant des hypothèses données ci-dessus

2/ Déterminez l'estimateur de β par la méthode des MCO, noté $\widehat{\beta}$

3/ Démontrez que cet estimateur est sans biais

4/ Déterminez la variance de cet estimateur

5/ Proposez un estimateur pour la variance du termer d'erreur σ^2

Exercice 3:

Soit le modèle de régression linéaire:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + u_t \ t = 1, .., T$$

1/ On change l'échelle de la variable dépendante y_t qui devient y_t^* (par exemple on passe d'un revenu annuel en euro à un revenu annuel en **milliers** d'euros). Cela revient à multiplier les deux termes de l'équation de régression par un scalaire non nul c.(qui sera donc dans l'exemple égal à $0,0001$). Ecrivez ce nouveau modèle de régression en reparamétrant le modèle initial et comparez les estimations des paramètres de ces deux modèles.

2/ Est-ce que les statistiques, R^2, s^2 sont invariantes à cette transformation d'échelle?

Exercice 4:

Soit le modèle de régression linéaire:

$$y_t^* = \beta_1^* + \beta_2^* x_t^* + u_t$$

avec $y_t^* = y_t - \overline{y}$, $x_t^* = x_t - \overline{x}$

1/. Etablissez que l'estimateur par la méthode des MCO du coefficient β_1 ne peut prendre qu'une seule et unique valeur, 0, quelque soit l'échantillon utilisé.

2/ L'estimateur par la méthode des MCO du coefficient β_2^* est-il identique à celui de β_2 dans le modèle usuel:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + u_t$$

Exercice 5:

Considérons le modèle de régression linéaire simple vérifiant les hypothèses classiques:

$$y_t = \beta_1 + x_t \beta_2 + u_t$$

On considère deux estimateurs alternatifs à l'estimateur par MCO de β_2 :

$$\begin{aligned} \widetilde{\beta}_2 &= \frac{y_T - y_1}{x_T - x_1} \\ \widetilde{\widetilde{\beta}}_2 &= \frac{\sum_{t=1}^T y_t}{\sum_{t=1}^T x_t} \end{aligned}$$

1/ Déterminez si ces deux estimateurs sont sans biais?

2/ Déterminez les expressions de $Var\widetilde{\beta}_2$ et de $Var\widetilde{\widetilde{\beta}}_2$

Exercice 6:

On est dans le cas où l'on souhaite assigner à chaque observation un coefficient de pondération, cela revient à ce que les observations n'auront pas le même poids, la même importance dans l'estimation. C'est par exemple le cas où les unités d'observation sont des firmes ou bien des pays de taille différente et que l'on veut par conséquent donner plus de poids aux plus grandes firmes (ou aux plus grands pays) Ces pondérations seront notées w_t et pourront représenter le nombre d'établissements (dans le cas des firmes) ou la population ou la surface (dans le cas des pays).

1/ Dans le cas du modèle de régression linéaire, trouver l'estimateur de β_1 et de β_2 qui minimise la fonction de somme des carrées des résidus pondérés:

$$\sum_{t=1}^{T} w_t (y_t - b_1 - b_2 x_t)^2$$

Vous pourrez supposer sans perte de généralités que les pondérations "somment à 1": $\sum_{t=1}^T w_t = 1$

2/ Démontrez que l'estimateur obtenu reste sans biais sous les hypothèses classiques (hypothèses de Gauss-Markov)