CORRIGE

UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE 2011-2012

LICENCE SCIENCES ECONOMIQUES 3e ANNEE / MAGISTERE PREMIERE ANNEE

Session : décembre 2011 — Enseignant : Stephen BAZEN

Epreuve : ECONOMETRIE — Durée : 2 heures

Machines à calculer autorisées — Aucun document n'est autorisé

Traitez les deux parties du sujet

PARTIE A *Traitez toutes les questions suivantes*

Question 1 Abréviations (2 points)

Que représentent les abréviations suivantes ?

(a) 'iid' (b) 'DW' (c) 'MCG' (d) 'ARCH'

**

(a) 'iid' indépendamment et identiquement distribué

(b) 'DW' Durbin Watson

(c) 'MCG' Moindres carrés généralisés

(d) 'ARCH' 'Autoregressive Conditional Heteroscedasticity'

Question 2 Estimation d'une fonction de production (2 points)

Soit la fonction de production Cobb-Douglas où les variables sont exprimées en logarithmes: $\ln q_i = \beta_0 + \beta_1 \ln l_i + \beta_2 \ln k_i + u_i$ avec $u_i \sim IN(0, \sigma^2)$ et où q_i est la production, l_i est le nombre de salariés et k_i est le nombre de machines. Les paramètres sont estimés par la méthode des moindres carrés ordinaires avec un échantillon de 60 observations.

$$\ln q_i = \underset{(0,84)}{1,21} + \underset{(0,027)}{0,626} \ln l_i + \underset{(0,020)}{0,125} \ln k_i + \hat{u}_i$$

$$R^2 = 0,95 \qquad SCR = 1,122 \qquad n = 60$$

Les écart types estimés figurent entre parenthèses.

(a) Donnez une interprétation aux valeurs estimées de β_1 et β_2.

*** La relation étant exprimée en logarithmes, ces coefficients sont des élasticités. Donc, si le nombre de salariés augmente de 1%, la production augmente de 0,626%. Si le nombre de machines est augmenté de 1%, la production augmente de 0,125%.

(b) Testez l'hypothèse nulle $H_0 : \beta_0 = 0$.

*** La statistique de Student est donnée par : $t = \dfrac{\hat{\beta}_0 - 0}{\sqrt{\mathrm{var}(\hat{\beta}_0)}} = \dfrac{1{,}21}{0{,}84} = 1{,}44$.

Le degré de liberté s'élève à $n - k = 60 - 3 = 57$

La valeur critique pour $dl = 60$ est de 2,0.

Décision : $|t| < 2{,}0$ donc on accepte l'hypothèse nulle.

(c) Etant donné le résultat de ce test, quelle est la forme de la fonction de production lorsque l'on l'écrit sous la forme $q_i = f(l_i, k_i)$?

*** Si $\beta_0 = 0$, $q_i = \exp(0) \times l_i^{\beta_1} \times k_i^{\beta_2}$ ou $q_i = l_i^{\beta_1} \times k_i^{\beta_2}$

Question 3 Modèle linéaire (2 points)

Soit le modèle linéaire : $y_i = x_i\beta + u_i$ où x_i est non aléatoire. On suppose que le terme d'erreur est tel que : $u_i \sim iid(0, \sigma^2)$. On utilise l'estimateur suivant afin de déterminer la valeur de β pour un échantillon de n observations :

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} z_i x_i} \quad \text{où } z_i \text{ est non aléatoire}$$

(a) Déterminez le biais de cet estimateur.

*** Le biais $= E(\tilde{\beta}) - \beta$.

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} z_i x_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i (x_i \beta + u_i)}{\sum_{i=1}^{n} z_i x_i} = \beta + \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i u_i}{\sum_{i=1}^{n} z_i x_i}$$

$E(\tilde{\beta}) = \beta + E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} z_i u_i}{\sum_{i=1}^{n} z_i x_i}\right)$ car β est certain donc $E(\beta) = \beta$

x_i et z_i étant non aléatoires, on a : $E(\tilde{\beta}) = \beta + \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i E(u_i)}{\sum_{i=1}^{n} z_i x_i}$

$E(u_i) = 0$, donc $E(\tilde{\beta}) = \beta + \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i 0}{\sum_{i=1}^{n} z_i x_i} = \beta$

Donc : $E(\tilde{\beta}) - \beta = 0$, le biais de cet estimateur est nul.

(b) Quel est le nom de cet estimateur ? Est-ce qu'il s'agit du meilleur estimateur de β dans ce modèle ?

*** Il s'agit de l'estimateur des variables instrumentales. Etant donné que x_i et z_i sont non aléatoires et $u_i \sim iid(0, \sigma^2)$, l'estimateur des variables instrumentales est un estimateur linéaire sans biais. Dans ce contexte, d'après le théorème de Gauss et Markov, le meilleur estimateur est celui qui a la plus petite variance – celui des moindres carrés ordinaires donné par :

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Question 4 Tests de spécification (2 points)

On s'intéresse à la relation suivante : $y_i = \alpha + x_i \beta + u_i$. On dispose d'un échantillon de 40 observations et on utilise l'estimateur des moindres carrés ordinaires afin d'estimer les paramètres α et β. Répondez aux questions (a), (b) et (c) ci-dessous en vous servant des estimations suivantes :

(i) $y_i = 3{,}88 + 1{,}18\,x_i + \hat{u}_i$
$\quad\quad (0{,}25)\ (0{,}12)$

(ii) $y_i = 4{,}48 + 1{,}81\,x_i - 0{,}046\,\hat{y}_i^2 + \hat{v}_i$
$\quad\quad (0{,}82)\ (0{,}83)\ (0{,}06)$

(iii) $x_i = -1{,}27 + 0{,}79\,z_i + \hat{\varepsilon}_i$
$\quad\quad (0{,}51)\ (0{,}13)$

(iv) $y_i = 4{,}96 + 1{,}68\,x_i - 1{,}12\,\hat{x}_i + \hat{\eta}_i$
$\quad\quad (0{,}26)\ (0{,}13)\ (0{,}19)$

où $\hat{u}_i, \hat{v}_i, \hat{\varepsilon}_i$ et $\hat{\eta}_i$ sont des résidus. Les écart types estimés figurent entre parenthèses.

(a) Testez l'hypothèse selon laquelle la relation est linéaire.

*** On utilise le test RESET de Ramsey. Il s'agit de tester l'hypothèse nulle $H_0 : \theta = 0$ dans la régression :

$y_i = \alpha + \beta\, x_i + \theta\, \hat{y}_i^2 + v_i$

En s'appuyant sur la relation (ii), le test de Ramsey est le test de Student :

Statistique : $t = \dfrac{\hat{\theta} - 0}{\sqrt{\mathrm{var}(\hat{\theta})}} = \dfrac{-0{,}046}{0{,}06} = -0{,}767$

Valeur critique : pour $dl = n - k - 1 = 40 - 2 - 1 = 37$, valeur critique = 2,02

Etant donné que $|t| < 2{,}0$ donc on accepte l'hypothèse nulle.

Donc la relation est bien linéaire.

(b) Testez l'hypothèse selon laquelle il n'y a aucune corrélation entre x_i et u_i.

*** On utilise le test de Hausman qui consiste à tester l'hypothèse nulle $H_0 : \psi = 0$ dans la régression suivante :

$y_i = \alpha + \beta\, x_i + \theta\, \hat{x}_i + \eta_i$

En s'appuyant sur la relation (iv), le test de Hausman est le test de Student :

Statistique : $t = \dfrac{\hat{\psi} - 0}{\sqrt{\mathrm{var}(\hat{\psi})}} = \dfrac{-1{,}12}{0{,}19} = -5{,}89$

Valeur critique : le test étant asymptotique, la valeur critique = 1,96

Etant donné que $|t| > 1{,}96$ donc on rejette l'hypothèse nulle.

Donc la variable explicative x_i est corrélée avec le terme d'erreur u_i.

(c) Quelles conclusions tirer concernant l'estimateur approprié pour les paramètres α et β ?

*** La corrélation détectée entre la variable explicative x_i et le terme d'erreur u_i, impliquent que l'estimateur des moindres carrés ordinaires est biaisé et non convergent. L'estimateur des variables instrumentales qui est biaisé mais convergent est l'estimateur approprié.

Question 5 Théorème de Frisch, Waugh et Lovell (2 points)

Soit la relation linéaire $y = X\beta + Z\alpha + u$ où X et Z sont non aléatoires. Les paramètres d'intérêt sont les éléments du vecteur β.

(a) Quel est l'enseignement du théorème de Frisch, Waugh et Lovell concernant l'estimation des paramètres d'intérêt ?

*** Le théorème de FWL nous précise que l'on obtient les mêmes valeurs de β lorsque l'on utilise la méthode des MCO dans la relation $y = X\beta + Z\alpha + u$ ou la relation transformée $M_Z y = M_Z X\beta + M_Z u$, où $M_Z = I - Z'(Z'Z)^{-1}Z'$.

(b) Décrivez la mise en œuvre de cette démarche pour estimer le paramètre δ dans le contexte du modèle suivant : $y_i = x_i\delta + z_i\gamma + w_i\lambda + u_i$ pour un échantillon de n observations.

*** Multiplier un vecteur ou une matrice par $M_Z = I - Z'(Z'Z)^{-1}Z'$ revient à créer des résidus. Ici les résidus seront :

$\hat{\varepsilon}_i = y_i - z_i\hat{\phi}_1 - w_i\hat{\phi}_2$ et $\hat{v}_i = x_i - z_i\hat{\theta}_1 - w_i\hat{\theta}_2$

L'estimateur des MCO du paramètre δ est donc : $\hat{\delta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\hat{v}_i\hat{\varepsilon}_i}{\sum_{i=1}^{n}\hat{v}_i^{\,2}}$

Question 6 Modèle dynamique (2 points)

Un économètre a estimé le modèle suivant avec des séries chronologiques :

$$y_t = 0{,}6 + 0{,}4\, z_t - 0{,}15\, \Delta x_t + 0{,}35\, y_{t-1} + \hat{u}_t \quad \text{où } \hat{u}_t \text{ est le résidu.}$$

(a) Déterminez l'impact d'une hausse de z de 10 unités sur y en courte période et en longue période.

*** L'effet d'une hausse unitaire de z en courte période est donnée par la dérivée partielle : $\frac{\partial y_t}{\partial z_t} = 0{,}4$

Une hausse de z de 10 unités en courte période donnerait lieu à une hausse de y de 4 unités.

En longue période on a : $y_t = y_{t-1} = y^*$, $x_t = x_{t-1} = x^*$ et $z_t = z_{t-1} = z^*$ donc :

$$y^* = \frac{0{,}6 + 0{,}4z^* - 0{,}15 \times 0 + \hat{u}}{1 - 0{,}35} = 0{,}92 + 0{,}615z^* + residu$$

L'effet d'une hausse unitaire de z en longue période est donnée par la dérivée partielle : $\frac{\partial y^*}{\partial z^*} = 0{,}615$

Une hausse de z de 10 unités en courte période donnerait lieu à une hausse de y de 6,15 unités.

(b) Quelle est la forme de la relation entre y et x ?

*** La variable x n'a qu'une influence en courte période sur y. Il n'y a aucune relation de longue période entre y et x parce que $x_t = x_{t-1} = x^* \Rightarrow x_t - x_{t-1} = 0$.

PARTIE B – répondez à *une* des questions suivantes *(8 points)*

QUESTION I – *Utilisations du test de Fisher*

La fonction de demande de monnaie est une relation entre la masse monétaire M, le revenu national en prix constants Y, le taux d'intérêt i, et l'indice de prix P. Un modèle économétrique de cette fonction est donné par l'équation suivante :

$$\ln M_t = \beta_0 + \beta_1 \ln P_t + \beta_2 \ln Y_t + \beta_3 i_t + u_t \qquad u_t \sim IN(0, \sigma^2).$$

(i) Quelle interprétation donner aux coefficients β_1 et β_2?

*** La relation étant exprimée en logarithmes (sauf pour le taux d'intérêt), ces coefficients sont des élasticités. Donc si l'indice des prix augmente de 1%, la demande de monnaie augmente de $\beta_1\%$. Si le revenu national en prix constants augmente de 1%, la demande de monnaie augmente de $\beta_2\%$.

(ii) L'estimation des paramètres par la méthode des moindres carrés ordinaires fournit les résultats suivants :

$$\ln M_t = 1{,}61 + 1{,}08 \ln P_t + 0{,}76 \ln Y_t - 0{,}009\, i_t + \hat{u}_t$$
$$(0{,}71) \quad (0{,}05) \quad (0{,}09) \qquad (0{,}001)$$
$$R^2 = 0{,}995 \quad SCR = 0{,}0485 \quad T = 68$$

Les écart types estimés figurent entre parenthèses.

Soit l'hypothèse nulle $H_0^A : \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 0,\ \beta_3 = 0$.

(a) Quelle interprétation économique donner à cette hypothèse ?

*** Si cette hypothèse est vraie, le modèle devient : $\ln M_t = \beta_0 + u_t$. La demande de monnaie est constante en moyenne. La seule source de variation de la demande de monnaie sont les chocs aléatoires (dus à u_t).

(b) Testez cette hypothèse.

*** Il s'agit d'une hypothèse composée. Il y a 3 restrictions. On utilise le test de Fisher basé sur le R².

$$F = \frac{R^2/3}{(1-R^2)/(T-k)}$$

Dans le modèle, $R^2 = 0{,}995$ et $T - k = 68 - 4$. La statistique s'élève à 4245.

La valeur critique est donc pour $F(3, 64)$ est de 2,76. On rejette facilement l'hypothèse parce que la statistique est supérieure à la valeur critique. Le modèle est donc globalement signficicatif.

(iii) Soit l'hypothèse nulle $H_0^B : \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 1,\ \beta_3 = 0$.

(a) Quelle interprétation économique donner au modèle écrit avec ces restrictions imposées?

*** On écrit le modèle avec les restrictions imposées :

$$\ln M_t = \beta_0 + 1 \times \ln P_t + 1 \times \ln Y_t + 0 \times i_t + u_t$$

$$\Rightarrow \ln M_t = \beta_0 + \ln P_t + \ln Y_t + u_t$$

Or $\ln P_t + \ln Y_t = \ln(P_t \times Y_t)$ donc : $\ln M_t - \ln(P_t \times Y_t) = \beta_0 + u_t$

et $\ln\left(\dfrac{M_t}{P_t Y_t}\right) = \beta_0 + u_t$

En termes économiques : (1) la part du revenu détenue sous forme liquide est constante

(2) la vitesse de circulation est constante

(b) La somme de carrés des résidus pour le modèle estimé avec ces restrictions imposées s'élève à 0,0789. Testez l'hypothèse $H_0^B : \beta_1 = 1, \beta_2 = 1, \beta_3 = 0$.

*** Le test de Fisher se fait en termes des sommes carrés des résidus du modèle sans et avec contrainte :

$$F = \frac{(SCR_C - SCR_S)/3}{SCR_S/(64-4)} = \frac{(0{,}0789 - 0{,}0485)/3}{0{,}0485/(68-4)} = 13{,}37$$

La valeur critique est pour $F(3, 64)$ est de 2,76. On rejette facilement l'hypothèse parce que la statistique est supérieure à la valeur critique.

(iv) A partir des résultats suivants, testez l'hypothèse selon laquelle les paramètres sont stables pendant la période étudiée :

Première sous période :

$$\ln M_t = \underset{(0{,}59)}{1{,}01} + \underset{(0{,}024)}{1{,}11} \ln P_t + \underset{(0{,}07)}{0{,}83} \ln Y_t - \underset{(0{,}001)}{0{,}012}\, i_t + \hat{u}_t$$

$$R^2 = 0{,}997 \quad SCR = 0{,}0062 \quad T = 40$$

Seconde sous période :

$$\ln M_t = \underset{(1{,}85)}{3{,}25} + \underset{(0{,}13)}{0{,}83} \ln P_t + \underset{(0{,}22)}{0{,}56} \ln Y_t + \underset{(0{,}002)}{0{,}0006}\, i_t + \hat{u}_t$$

$$R^2 = 0{,}98 \quad SCR = 0{,}0043 \quad T = 28$$

*** Il s'agit du test de Chow. Il faut donc calculer la statistique de Fisher pour l'hypothèse nulle : $H_0^C : \beta_0^A = \beta_0^B, \beta_1^A = \beta_1^B, \beta_2^A = \beta_2^B, \beta_3^A = \beta_3^B$, soit 4 restrictions. La somme de carrés des résidus sans restrictions est : $SCR_S = 0{,}0062 + 0{,}0043 = 0{,}0105$. La somme de carrés avec les restrictions imposées est $SCR_C = 0{,}0485$. La statistique de Fisher pour cette hypothèse est :

$$F = \frac{(SCR_C - SCR_S)/4}{SCR_S/(68-8)} = \frac{(0{,}0485 - 0{,}0105)/4}{0{,}0105/(68-8)} = 54{,}3$$

La valeur critique est pour $F(4, 60)$ est de 2,52. On rejette facilement l'hypothèse parce que la statistique est supérieure à la valeur critique.

(v) Quelles conclusions tirer concernant la stabilité de la fonction de demande de monnaie ?

*** Evidemment la demande de monnaie n'est pas stable. Mais pourquoi ? Si on compare les coefficients estimés entre les deux périodes on constate que dans la seconde période, le taux d'intérêt n'a aucune influence sur la demande de monnaie, la constante a triplé, les élasticités prix et revenu sont plus faibles, et le R^2 a diminué. Un changement régime de politique monétaire pourrait être la raison par exemple.

QUESTION II – *Hétéroscédasticité*

Soit la relation affine : $y_i = \alpha_0 + x_i\alpha_1 + u_i$. On dispose d'un échantillon de n observations. On écrit le modèle sous forme matricielle : $y = X\beta + u$ où X est une matrice dont le rang est égal à 2. Le terme d'erreur (u_i) satisfait aux hypothèses suivantes :

$$E(u_i)=0,\ \operatorname{cov}(u_i,u_j)=E(u_i\times u_j)=0 \text{ pour } i\neq j \text{ et } \operatorname{var}(u_i)=E(u_i^2)=\sigma^2 w_i^2$$

w_i est non aléatoire

(i) Présentez le contenu de la matrice X et du vecteur β.

*** Il y a une constante dans le modèle donc :

$$X=\begin{pmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\\ 1 & x_3\\ \vdots & \vdots\\ 1 & x_n\end{pmatrix}\quad \beta=\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix}$$

(ii) Présentez la matrice de variances covariances (Ω) du vecteur u.

*** La matrice des variances covariances est définie par :

$$\Omega=\operatorname{var}(u)=\begin{pmatrix}\operatorname{var}(u_1) & \operatorname{cov}(u_1,u_2) & \cdots & \operatorname{cov}(u_1,u_n)\\ \operatorname{cov}(u_1,u_2) & \operatorname{var}(u_2) & & \operatorname{cov}(u_2,u_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \operatorname{cov}(u_1,u_n) & \operatorname{cov}(u_2,u_n) & & \operatorname{var}(u_n)\end{pmatrix}$$

A partir des renseignements fournis dans l'énoncé, on remplit la matrice :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma^2 w_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \text{cov}(u_1, u_2) & \sigma^2 w_2^2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \sigma^2 w_n^2 \end{pmatrix}$$

(iii) Les paramètres sont estimés par la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO). Montrer que l'estimateur des MCO de β (version matricielle) est sans biais.

*** L'estimateur des MCO de β sous forme matricielle est donné par : $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$.

On remplace y : $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'(X\beta + u)$.

On simplifie y : $\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1} X'u$.

On détermine l'espérance : $E(\hat{\beta}) = E(\beta + (X'X)^{-1} X'u)$.

β étant certain et X non aléatoire on obtient : $E(\hat{\beta}) = \beta + (X'X)^{-1} X'E('u)$

L'estimateur est donc sans biais parce que $E(u_i) = 0$ pour tout i.

Donc même en présence de l'hétéroscédasticité, l'estimateur des MCO est sans biais.

(iv) Soit la relation transformée : $\dfrac{y_i}{w_i} = \dfrac{\alpha_0}{w_i} + \dfrac{x_i}{w_i}\alpha_1 + \dfrac{u_i}{w_i}$

Déterminez (a) $E\left(\dfrac{u_i}{w_i}\right)$,

*** $E\left(\dfrac{u_i}{w_i}\right) = \dfrac{1}{w_i} E(u_i)$ parce que w_i est non aléatoire. $E(u_i) = 0$ donc : $E\left(\dfrac{u_i}{w_i}\right) = 0$

(b) $\text{var}\left(\dfrac{u_i}{w_i}\right) = E\left(\left(\dfrac{u_i}{w_i}\right)^2\right)$

*** $E\left(\left(\dfrac{u_i}{w_i}\right)^2\right) = \dfrac{1}{w_i^2} E(u_i^2)$ parce que w_i est non aléatoire. $E(u_i^2) = \sigma^2 w_i^2$ donc : $E\left(\left(\dfrac{u_i}{w_i}\right)^2\right) = \sigma^2$

et (c) $\text{cov}\left(\dfrac{u_i}{w_i}, \dfrac{u_j}{w_j}\right) = E\left(\dfrac{u_i}{w_i} \times \dfrac{u_j}{w_j}\right)$.

*** $E\left(\frac{u_i}{w_i} \times \frac{u_j}{w_j}\right) = \frac{1}{w_i w_j} E(u_i u_j)$ parce que w_i et w_j sont non aléatoires. Donc : $\frac{1}{w_i w_j} E(u_i u_j) = 0$ parce que $E(u_i u_j) = 0$

(v) Quelles conclusions tirer concernant l'estimation des paramètres de la relation transformée ?

*** Etant donné que le terme d'erreur dans la relation transformée $\frac{u_i}{w_i} \sim iid(0, \sigma^2)$, l'estimateur des moindres carrés ordinaires peut être utilisé pour estimer les paramètres de la relation *transformée* afin d'obtenir des estimations sans biais avec la plus faible variance.

Quelques valeurs critiques

Loi de Student

degrés de liberté :	valeur critique (5%)
40	2,02
60	2,00

Loi de Fisher

degrés de liberté :	valeur critique (5%)
3 ; 60	2,76
4 ; 60	2,52