Correction TD 1

16 octobre 2013

1 Exo 1

$$y_t = \beta + u_t, t = 1, ..., T$$

1) Calcul de l'espérance, variance et covariance :

$$E[y_t] = E[\beta + u_t] = E[\beta] + E[u_t] = \beta$$

On utilise la linéarité de l'espérance ainsi que les hypothèses du modèle.

$$var(y_t) = var(\beta + u_t) = var(u_t) = \sigma^2$$

On utilise la formule de la variance $var(aX + b) = a^2 var(X)$ et les hypothèses du modèle. On peut aussi le re-démontrer en passant par l'espérance.

$$\begin{aligned} cov(y_s, y_t) &= E[(y_t - E(y_t))(y_s - E[y_s])] = E[y_t y_s - y_t E[y_s] - y_s E[y_t] + E[y_t]E[y_s]] \\ &= E[y_t y_s] - E[y_t \beta] - E[y_s \beta] + E[\beta^2] = E[y_t y_s] - \beta^2 - \beta^2 + \beta^2 = E[y_t y_s] - \beta^2 \\ &= E[(\beta + u_t)(\beta + u_s)] - \beta^2 = E[\beta^2 + u_t u_s + \beta u_t + \beta u_s] - \beta^2 \\ &= E[u_t u_s] = cov(u_t, u_s) = 0 \end{aligned}$$

2) On minimise la somme des carrés des résidus : $\sum_{t=1} T(y_t - \beta)^2$. Pour cela, on calcule la dérivée : $-2\sum_{t=1}^{T}(y_t - \beta)$ que l'on va chercher à annuler. On a :

$$-2\sum_{t=1}^{T}(y_t - \hat{\beta}) = 0 \Leftrightarrow -T\hat{\beta} + \sum_{t=1} T y_t = 0 \Leftrightarrow \hat{\beta} = \bar{y}$$

3) On va calculer $E[\hat{\beta}] - \beta$:

$$E[\hat{\beta}] - \beta = E[\frac{\sum_{t=1}^{T} y_t}{T}] - \beta = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} E[y_t] - \beta = \frac{T}{T}\beta - \beta = 0$$

D'après la réponse trouvée à la question 1, ce qui prouve que l'estimateur des MCO est sans biais.

4) Calcul de $var(\hat{\beta})$:

$$var(\hat{\beta}) = var(\frac{\sum_{t=1}^{T} y_t}{T}) = \frac{1}{T^2}\sum_{t=1} T var(y_t) + 2\sum_{1<t<s}^{T} cov(y_t, y_s) = \frac{\sigma^2}{T}$$

Plus T est grand, moins la variance de notre estimateur le sera et on aura donc une meilleure précision.

5) $\sigma^2 = E(u^2)$, un estimateur de ce terme serait donc la moyenne des erreurs au carré : $\hat{\sigma^2} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_t^2$, or on ne connait pas u_t. On prendra donc les résidus estimés. Un estimateur serait donc :$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \hat{u_t^2}$. Cet estimateur est biaisé car il ne prend pas en compte les restrictions sur les résidus (somme des résidus nulle, les résidus doivent être orthogonaux aux variables explicatives). Comme on a une restriction, pour enlever ce biais, on divise la somme des résidus estimée par $T - 1$.

2 Exo 2

1) C'est le même principe que l'exercice 1 :

$$E(y_t) = E(\beta x_t + u_t) = \beta E[x_t] = \beta x_t$$

$$var(y_t) = var(\beta x_t + u_t) = \beta^2 var(x_t) + var(u_t) + 2cov(x_t, u_t) = \beta^2 var(x_t) + \sigma^2 = \sigma^2$$

$$cov(y_t, y_s) = E[(y_t - E(y_t))(y_s - E(y_s))] = E[y_t y_s - E[y_t]y_s - ytE[y_s] + E[y_t]E[y_s]]$$

$$= E[ytys] - \beta x_s E[y_t] - \beta x_t E[y_s] + \beta^2 x_t x_s = E[y_t y_s] - \beta^2 x_t x_s$$

$$= E[(\beta x_t + u_t)(\beta x_s + u_s)] - \beta^2 x_t x_s = E[\beta^2 x_t x_s + \beta x_t u_s + \beta x_s u_t + u_t u_s] = \beta^2 E[x_t x_s] + 0 + 0 + 0 - \beta^2 x_t x_s = 0$$

2) On minimise la somme des carrés de résidus :

$$min \sum_{t=1}^{T} u_t^2 = \sum_{t=1}^{T} (y_t - x_t \beta)^2$$

On dérive par rapport à β :

$$\sum_{t=1}^{T} y_t x_t - \sum_{t=1}^{T} x_t^2 \hat{\beta} = 0 => \hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T} y_t x_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}$$

3) Calcul de $E[\hat{\beta}] - \beta$:

$$E[\hat{\beta}] - \beta = E[\frac{\sum_{t=1}^{T} y_t x_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}] - \beta = \frac{E[\sum_{t=1}^{T} y_t x_t]}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} - \beta = \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t E[y_t]}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} - \beta$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t \beta x_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} - \beta = \beta - \beta = 0$$

4) Calcul de $var(\hat{\beta})$:

$$var(\hat{\beta}) = var(\frac{\sum_{t=1}^{T} y_t x_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}) = \frac{1}{(\sum_{t=1}^{T} x_t^2)^2} \sum_{t=1}^{T} x_t^2 var(y_t) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}$$

3 Exo 3

1) On a $y_t^* = cy_t = c(\beta_1^* + \beta_2^* x_t + u_t)$. On va trouver les estimateurs de β_1^* et de β_2^* de cette régression : On minimise la somme des résidus au carré : $\sum_{t=1}^{T} (y_t^* - \beta_1^* + \beta_2^* x_t^*)^2$ On prend les dérivés par rapport à β_1^* et β_2^* :

$$-2c \sum_{t=1}^{T} cy_t - c\hat{\beta}_1^* - c\hat{\beta}_2^* x_t = 0 \tag{1}$$

$$-2c \sum_{t=1}^{T} cy_t x_t - c\hat{\beta}_1^* x_t - c\hat{\beta}_2^* x_t^2 = 0 \tag{2}$$

De la première équation on récupère $\hat{\beta}_1$:

$$0 = \sum_{t=1}^{T} y_t - \sum_{t=1}^{T} \hat{\beta}_1^* - \sum_{t=1}^{T} \hat{\beta}_2^* x_t => T\hat{\beta}_1^* = \sum_{t=1}^{T} y_t - \sum_{t=1}^{T} \hat{\beta}_2^* x_t$$

$$=> \hat{\beta_1^*} = \bar{y} - \hat{\beta_2^*}\bar{x}$$

Calcul de $\hat{\beta_2^*}$:

$$\sum_{t=1}^{T} y_t x_t - (\bar{y} - \hat{\beta_2^*}\bar{x})x_t - \hat{\beta_2^*}{x_t}^2 = 0 => \sum_{t=1}^{T} y_t x_t - \sum_{t=1}^{T} \bar{y}x_t + \hat{\beta_2^*}\sum_{t=1}^{T} \bar{x}x_t - \beta_2^* \sum_{t=1}^{T} x_t^2 = 0$$

$$\hat{\beta_2^*} = \frac{\sum_{t=1}^{T} y_t x_t - \sum_{t=1}^{T} \bar{y}x_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^{*2} - \sum_{t=1}^{T} \bar{x}x_t} => \hat{\beta_2^*} = \hat{\beta_2}$$

Comme $\hat{\beta_2^*} = \hat{\beta_2}$, $\hat{\beta_1^*} = \hat{\beta_1}$.
2) Calcul du R^{2*}

$$R^{*2} = \frac{(\hat{y}^* - \bar{y}^*)^2}{(y^* - \bar{y}^*)^2} = \frac{(c(\hat{y}^* - \bar{y}))^2}{(c(y - \bar{y}))^2} = \frac{(\hat{y}^* - \bar{y})^2}{(y - \bar{y})^2} = R^2$$

Le R^2 est invariant à cette transformation.

$$s^{*2} = \frac{1}{T-2}\sum_{t=1}^{T} \hat{u_t^*} = \frac{c^2}{T-2}\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t$$

s^2 n'est pas invariant à cette transformation.

4 Exo 4

1) Soit le modèle $y_t^* = \beta_1^* + \beta_2^* x_t^* + u_t$ avec $y_t^* = y_t - \bar{y}$ On remplace x_t^* et y_t^* par leur valeur :

$$y_t = \beta_1^* + \beta_2^*(x_t - \bar{x}) + u_t + \bar{y} => u_t = y_t - \bar{y} - \beta_2^*(x_t - \bar{x})$$

On dérive par rapport à β_1 la somme des carrés des résidus :

$$\sum_{t=1}^{T} y_t - \beta_1 - \beta_2^*(x_t - \bar{x}) - \bar{y} = 0 => \sum_{t=1}^{T} y_t - \sum_{t=1}^{T} \beta_1 - \sum_{t=1}^{T} \beta_2^*(x_t - \bar{x}) - \sum_{t=1}^{T} \bar{y} = 0$$

$$=> \sum_{t=1}^{T} y_t - \beta_2 \sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x}) - \sum_{t=1}^{T} \bar{y} = T\beta_1 \;\; => \hat{\beta_1} = \bar{y} - \beta_2\bar{x} + \frac{\beta_2 T\bar{x}}{T} - \frac{T\bar{y}}{T} => \hat{\beta_1} = 0$$

2) On dérive par rapport à β_2 la somme des carrés des résidus :

$$\sum_{t=1}^{T}(y_t - \beta_2^*(x_t - \bar{x}) - \bar{y})x_t = 0 => \sum_{t=1}^{T} y_t x_t - \sum_{t=1}^{T} \beta_2^* x_t^2 + \sum_{t=1}^{T} \beta_2 \bar{x} x_t - \sum_{t=1}^{T} \bar{y} x_t = 0$$

$$\hat{\beta_2} = \frac{\sum_{t=1}^{T} y_t x_t - \sum_{t=1}^{T} \bar{y}x_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2 - \sum_{t=1}^{T} \bar{x}x_t}$$

Qui est l'estimateur classique de β_2 par MCO.