Correction Fiche TD 7 - Econométrie - Autocorrelation et tests d'hypothèses

Thomas Chuffart - thomas.chuffart@univ-amu.fr

December 8, 2013

1 Théorie

$$y = X\beta + \rho u_{t-1} + \epsilon_t \quad (1)$$

Avec ϵ_t distribués IID selon une normale $(0, \sigma_u^2)$.

Question 1

u_t peut s'écrire de la forme suivante:

$$u_t = \rho(\rho u_{t-2} + \epsilon_{t-1}) + \epsilon_t => u_t = \rho^2(\rho u_{t-3} + \epsilon_{t-2}) + \rho\epsilon_{t-1} + \epsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \epsilon_{t-i}$$

Donc,

$$E(u_t) = E(\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \epsilon_{t-i})$$

L'espérance est un opérateur linéaire et $E(\epsilon_t) = 0$ quelque soit $t = 1, ..., T$. Cette espérance est nulle et donc $E(u_t) = 0$.

$$Var(u_t) = Var(\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \epsilon_{t-i})$$

Pour $i \neq k$.

$$Var(u_t) = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^{2i} Var(\epsilon_{t-i}) + 2\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \rho^j cov(\epsilon_{t-i}, \epsilon_{t-j})$$

$$Var(u_t) = \sigma_\epsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i 2$$

$$Var(u_t) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \rho^2}$$

Or comme $\rho < |1|$, la variance est finie.

$$cov(u_t, u_{t-k}) = E(u_t u_{t-k}) - E(u_t)E(u_{t-k}) = E(\rho u_{t-1} u_{t-k} + \epsilon_t u_{t-k}) = \rho E[u_{t-1} u_{t-k}] + 0 = \rho cov(u_{t-1}, u_{t-k})$$

Si on développe jusque u_{t-k}, on arrive à $\rho^k cov(u_{t-k}, u_{t-k}) = \rho^k var(u_{t-k}) = \rho^k \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\rho^2}$

La forme de la matrice variance-autocovariance est dans le cours.

Question 2

Estimateur des MCO sans biais:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

$$E(\hat{\beta}) = E((X'X)^{-1}X'y) = E((X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'u) = \beta$$

L'estimateur des MCO est donc bien sans biais malgré la mauvaise spécification. L'impact de cette mauvaise spécification va se répercuter sur la variance de l'estimateur qui ne sera pas la plus petite parmi tous les estimateur linéaire sans biais.

Question 3

Dans le modèle (1), les résidus sont de la forme $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$. Pour voir si il y a réellement auto-corrélation des résidus, on va tester si $\rho = 0$. C'est l'hypothèse nulle du test de Durbin-Watson. La statistique de test est la suivante:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{T} (\epsilon_t - \epsilon_{t-1})^2}{\sum_{i=1}^{T} \epsilon_t^2}$$

DW est approximativement égale à $2(1-r)$ avec r l'autocorrélation de l'échantillon des résidus. Donc DW est bien compris entre 0 et 4. On utilise donc les résidus estimés pour calculer cette statistique. On repére 2 bornes dans la table de DW. d_1 et d_2 avec $d_1 < d_2$. Si DW est compris entre 0 et d_1. On rejette H_0 et on est en présence d'autocorrélation psotive. Si DW est comprise entre d_1 et d_2, on ne peut rien conclure. Si DW est comprise entre d_2 et $4 - d_2$, on accepte H_0. Si DW est comprise entre $4 - d_2$ et $4 - d_1$, on ne peut pas conclure et si DW est comprise entre $4 - d_1$ et 4, on a une autocorrélation négative. Attention, le test DW n'est plus valide lorsqu'il y a des variables retardées dans vos variables explicatives.

2 Application

On possède des données sur la consommation des ménages et le revenu disponible entre le premier trimestre de 1947 et le dernier trimestre de 1996. Les séries ont déjà reçu un ajustement saisonnier. On régresse le log de la consommation sur le revenu et une constante:

$$c_t = \beta_0 + \beta_1 y_t + u_t \tag{2}$$

Les résultats de l'estimation sont les suivants: $\hat{c_t} = 0.417(0.049) + 0.957(0.004)y_t$, SCR $= 0.2538$ et DW $=$ 0.187.

Question 1

On a 196 observations (4 trimestres par année). Pour 200 observations, avec 1 variables explicatives et une marge d'erreur de 5%, $d_1 = 1.76$ et $d_2 = 1.78$. On va donc rejeter H_0. Il y a autocorrélation **d'ordre 1**. Pour interpréter les résultats, on peut dire que l'élasticité conso/revenu est très proche de 1 mais vu que l'on a un problème d'autocorrélation, on ne peut effectuer les tests usuels classiques.

Question 2

La statistique de test de Breusch and Godfrey est $nR^2 = 196 * 0.819 = 160.52$ Là aussi il est clair que l'on va rejeter l'hypothèse nulle de non autocorrélation des résidus.

Question 3

$c_t = \beta_0 + \beta_1 y_t + \rho u_{t-1} + \epsilon_t$ or $u_{t-1} = c_{t-1} - \beta_1 y_{t-1} - \beta_0$ donc:

$$c_t = \beta_0 + \beta_1 y_t + \rho c_{t-1} - \rho\beta_1 y_{t-1} - \rho\beta_0 + \epsilon_t = c_t - \rho c_{t-1} = \alpha(1-\rho) + \beta_(y_t - \rho y_{t-1}) + \epsilon_t$$

Si ρ est connu, on peut estimer ce modèle par MCO dès lors que ϵ_t est un bruit blanc. L'estimation par MCO de se modèle est équivalent à l'utilisation des MCG.

3 Bonus

Question 1
Il s'agit d'un test unilatéral, la zone de rejetet sera donc que d'un seul coté:

$$t_{stat} = \frac{\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 - 1}{\hat{\sigma}_{\beta_1, \beta_2}} = \frac{0.38 + 0.72 - 1}{9.50 + 12 + 2 \times 0.05} = \frac{0.10}{21.60} = 0.0046 \tag{3}$$

La zone de rejet est $] - \infty, 1, 64]$ on rejette donc H_0, la somme des deux coefficients est significativement suppérieure à 1.

Question 2
Sous les conditions habituelles d'homoscédasticité des résidus.